CONCOURS D'ENTRÉE 1988

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES **DURÉE : 3 HEURES**

I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. On définit pour x réel la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{nk-1}}{(nk-1)!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots\dots$$

de somme $S_k(x)$ lorsqu'elle converge.

1. Calculer le rayon de convergence de cette série.

2. Soit : $\omega_s = \exp \frac{2\pi i s}{k}$; $s = 0, 1, 2, \dots, k-1$, les racines complexes k-ièmes de l'unité.

   a. Démontrer que le nombre : $A = \sum_{s=0}^{s=k-1} \omega_s \, e^{\omega_s . x}$ est un réel pour x réel.

   Calculer la partie réelle de : $\omega_s - 1$. Déterminer son signe.

   b. Calculer la somme : $\sum_{s=0}^{s=k-1} (\omega_s)^n$ selon les valeurs de l'entier $n \geqslant 0$.

3. En déduire que : $A = kS_k(x)$. (On pourra écrire $e^{\omega_s . x}$ sous forme d'une série entière de x à coefficients complexes, en justifiant les calculs).

4. Calculer $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} S_k(x)$.

5. a. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$ et N entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$\left| S_k(t) - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!} \right| \leqslant \frac{t^{Nk-1}}{(Nk-1)!} e^t$$

   b. En déduire que pour tout x réel : $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^x \frac{t^{nk-1} e^{-t}}{(nk-1)!} dt = \int_0^x e^{-t} S_k(t) dt$

6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{nk}}{(nk)!}$ pour k = 2, 3, 4, 5 à l'aide des fonctions élémentaires réelles.

Une épreuve probabiliste consiste à observer les passages des véhicules à un endroit précis d'une route. Ces passages se produisent à des instants aléatoires ; on dénombre les véhicules à partir d'un instant origine et on note la date de passage de chaque véhicule observé (cette date est un réel positif ou nul). On appelle X_t le nombre de véhicule(s) qui passe(nt) entre les dates 0 et t (On pose $X_0 = 0$) ; $t \geqslant 0$.

1. Décrire très brièvement un univers Ω lié à cette épreuve. L'existence d'une tribu naturelle d'événements étant admise sur Ω, X_t (pour tout $t \geqslant 0$) ainsi que les dates de passages des différents véhicules sont alors par hypothèse des variables aléatoires. Par hypothèse :

   - On suppose définie la probabilité P telle que : L'espérance $E(X_t)$ existe pour tout $t \geqslant 0$; la fonction : $t \longrightarrow m(t) = E(X_t)$ étant définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée : $t \longrightarrow \lambda(t) = m'(t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$.

   - Le nombre de passage(s) $Y_{t_0,\theta}$ se produisant entre les instants t_0 et $t_0 + \theta$, $t_0 \geqslant 0$, $\theta > 0$, est une variable aléatoire dont la loi est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N} : P\left(Y_{t_0,\theta} = k\right) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$$

   où : $\alpha = \int_{t_0}^{t_0+\theta} \lambda(u)du = m(t_0+\theta) - m(t_0)$.

2. Soit T_1 la variable aléatoire représentant la date de passage du 1er véhicule observé. Calculer $P(T_1 \geqslant t)$, en déduire une densité de T_1 en utilisant les fonctions λ et m.

3. a. Connaissant la date t_0 de passage du 1er véhicule, soit S_1 la longueur de l'intervalle de temps séparant les passages du 1er et du 2ème véhicule, calculer une densité de S_1 en fonction de t_0, λ, m.

   b. On suppose que $\lambda(t) = at + b$, a et b constantes positives, $t \in [0, +\infty[$. Vérifier qu'une densité de S_1 est :

$$h_1(t) = [a(t_0 + t) + b] \, e^{-\left[\frac{at^2}{2} + (at_0 + b)t\right]} \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

   $h_1(t) = 0$ pour $t < 0$.

   c. Représenter h_1 dans un repère orthonormé avec : $t_0 = 0{,}4$; $a = 2$; $b = 0{,}2$; préciser la concavité de la courbe.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX
et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt. Bio. Math. - Math 2

4. On <u>suppose</u> dans la suite du problème que : $\lambda(t) = \lambda_o$ constante positive pour tout $t \geqslant 0$. Soit T_k la date de passage du k-ième véhicule.

   a. Calculer $P(T_k \geqslant t)$ à l'aide de la loi de : $Y_{o,t}$.
   Démontrer qu'une densité de T_k est :

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad h_k(t) = \frac{\lambda_o(\lambda_o t)^{k-1}\, e^{-\lambda_o t}}{(k-1)!} \text{ , 0 sinon.}$$

   b. Calculer l'espérance et la variance de T_k.

5. On enregistre maintenant le passage d'un véhicule sur k où $k \geqslant 2$. Soit A_n l'événement : "le n.k-ième véhicule passe". Soit $T_n^{(k)}$ la date de A_n.
$n = 1, 2, 3, \ldots$ Calculer une densité de $T_n^{(k)}$.

6. h étant un réel positif, par hypothèse simplificatrice, on admet que h, k, t_o sont pris de telle sorte que, presque sûrement : au plus un seul événement de type A_n peut se produire entre les dates t_o et $t_o + h$.

   a. Soit P_h la probabilité qu'un événement A_n soit observé entre les dates t_o et $t_o + h$. En utilisant la partie I démontrer que :

$$P_h = \lambda_o \int_{t_o}^{t_o+h} S_k(\lambda_o t) e^{-\lambda_o t}\, dt.$$

   b. Calculer : $g(t_o) = \lim_{h \to 0} \frac{P_h}{h}$. Démontrer que : $\lim_{t_o \to +\infty} g(t_o) = \frac{\lambda_o}{k}$

   c. Que peut-on en déduire, pratiquement, sur la probabilité d'apparition d'un événement A_n entre les instants t_o et $t_o + h$ au delà d'un temps t_o d'observation assez long dans l'hypothèse simplificatrice précédente ?

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail